Vektorprodukt (Kreuzprodukt)
Übung

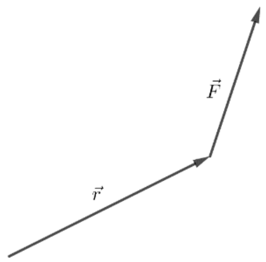
1. Berechnen Sie folgende Vektorprodukte:

   a) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-9\\6\\3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}a\\-a\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$

2. Das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

beschreibt die Drehwirkung einer Kraft $\vec{F}$ auf einen Körper. Dabei ist $\vec{r}$ der Ortsvektor vom Bezugspunkt des Drehmoments zum Angriffspunkt der Kraft.



a) Entscheiden Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind.

- Das Drehmoment $\vec{M}$ zeigt stets in dieselbe Richtung wie $\vec{F}$.
- Ist $\vec{r} \perp \vec{F}$, so gilt $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}|$.
- Der Betrag $|\vec{M}|$ entspricht der Fläche des von $\vec{r}$ und $\vec{F}$ festgelegten Parallelogramms.
- $\vec{M}$ ist senkrecht zum Vektor $\vec{r}$.
- Ist $|\vec{F}| = 0$, so ist auch $|\vec{M}| = 0$.

b) Eine im Punkt R mit dem Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ m angreifende Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ N wirkt auf einen Körper. Berechnen Sie den Betrag des auf den Körper wirkenden Drehmoments. Auf die Benennung der Einheiten Meter (m) und Newton (N) soll dabei verzichtet werden.

3. Zeigen Sie allgemein:

   Im $\mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ stets orthogonal zum Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

4. Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ jeweils so, dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind.

a) $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)
Lösung

1.

a) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-9\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\9\\45\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}a\\-a\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3a\\-3a\\0\end{pmatrix}$

2.

a)

- f, $\vec{M}$ steht stets senkrecht auf $\vec{F}$.
- w, für $\vec{r} \perp \vec{F}$ bilden die beiden Vektoren ein Rechteck.
- w, dies ist eine grundlegende Eigenschaft des Vektorprodukts.
- w, $\vec{M}$ ist senkrecht zu $\vec{r}$ und zu $\vec{F}$.
- w, es ergibt sich ein Parallelogramm mit Flächeninhalt null.

b) $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\-5\\-5\end{pmatrix}\right|$
$= \sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$.

3. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht) zueinander, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.
$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{b} = \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$
$= (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot b_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot b_3$
$= a_2b_3b_1 - a_3b_2b_1 + a_3b_1b_2 - a_1b_3b_2 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 = 0,$
da sich jeweils zwei der Ausdrücke aufheben.
Damit sind die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander.
Man könnte einen entsprechenden Beweis auch mit $\vec{a}$ anstatt mit $\vec{b}$ machen.

4.

a) $a = 1$, $b = -2$ und $c = -2$

b) $a = 0$, $b = 3$ und $c = -4$

c) $a = 1$, $b = 0$ und $c = 0$